



ΘΕΜΑΤΑ

Άσκηση 1. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση με πίνακα αναπαράστασης ως προς την κανονική

βάση E του $\mathbb{R}^2$ τον $A = [f]_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- α) Εξετάστε αν η f είναι ισομορφισμός. (8 μονάδες)
β) Βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P και έναν διαγώνιο πίνακα Δ για τους οποίους ισχύει η σχέση $A = P\Delta P^{-1}$. (9 μονάδες)
γ) Βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα Q και έναν διαγώνιο πίνακα D για τους οποίους ισχύει η σχέση $A = QDQ^T$. (8 μονάδες)

Άσκηση 2. Θεωρούμε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\}$.

- α) Βρείτε μία βάση S του V . Τι παριστάνει γεωμετρικά ο V ; (8 μονάδες)
β) Δείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v} = (3, 1, 1)$ ανήκει στον V και βρείτε τις συντεταγμένες του $\mathbf{v}$ ως προς τη βάση S του V που βρήκατε στο α). (8 μονάδες)
γ) Βρείτε μία βάση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$, $V^\perp$. Τι παριστάνει γεωμετρικά ο $V^\perp$; (9 μονάδες)

Άσκηση 3. Θεωρούμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{n} = (0, -2, 1)$ και τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$, $V = \text{span}(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$.

- α) Βρείτε μία βάση S του V που να αποτελείται από διανύσματα του συνόλου $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{n}\}$. (8 μονάδες)
β) Επεκτείνετε τη βάση S του V που βρήκατε στο α) σε βάση του $\mathbb{R}^3$ (έστω T). (8 μονάδες)
γ) Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ με $[\mathbf{u}]_E = (1, -1, 1)$ (E είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$). Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του $\mathbf{u}$ ως προς τη βάση T του $\mathbb{R}^3$ που βρήκατε στο β) (δηλ. βρείτε το $[\mathbf{u}]_T$). (9 μονάδες)

Άσκηση 4. Έστω E η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και $P = [f]_E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ο πίνακας αναπαράστασης του

γραμμικού μετασχηματισμού $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που προβάλλει τα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ επί της ευθείας $y = x$.

Βρείτε τον πυρήνα ($\text{Ker} f$) και την εικόνα ($\text{Im} f$) του f και δείξτε ότι $\mathbb{R}^2 = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$ (δηλαδή ο $\mathbb{R}^2$ είναι ευθύ άθροισμα των $\text{Ker} f$ και $\text{Im} f$). (7+7+11=25 μονάδες)

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Το άριστα αντιστοιχεί σε 100 μονάδες και η προαγωγή σε 50 μονάδες.
2. Μόνο σωστά αριθμητικά αποτελέσματα αντιστοιχούν σε πλήρη βαθμολόγηση.
3. Σας παρακαλούμε να μην καπνίζετε και να απενεργοποιήσετε τα κινητά σας τηλέφωνα.
4. Η έξοδος από την αίθουσα κατά την διάρκεια της εξέτασης δεν επιτρέπεται.
5. Η αποχώρηση από την αίθουσα είναι δυνατή μετά την παρέλευση μιας ώρας από την έναρξη.

Καλή επιτυχία και καλό καλοκαίρι.

Απαντήσεις των Θεμάτων στην Γραμμική Άλγεβρα

Αγαπητέ φοιτητή/τρια, οι απαντήσεις που ακολουθούν αποτελούν ενδεικτικές λύσεις των θεμάτων. Οποιαδήποτε άλλη μαθηματικά σωστή διαδικασία που τυχόν έχετε ακολουθήσει για την επίλυσή τους, είναι αποδεκτή.

Άσκηση 1.

α) Είναι $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$ οπότε ο πίνακας $\mathbf{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (βλέπε Θεώρημα 4.3.7, σελ. 221) δεν είναι ισομορφισμός

β) Θα διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα $\mathbf{A} = [f]_{\mathbb{E}}$. Γι αυτό θα βρούμε πρώτα τις ιδιοτιμές του:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \dots = \lambda(\lambda-2). \text{ Άρα } |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}.$$

Επομένως ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 2$. Συνεπώς ο $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται. Στη συνέχεια θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\mathbf{A}$:

Για να βρούμε ένα ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u} = (x, y)$ ($x, y \in \mathbb{R}$) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$, λύνουμε το σύστημα:

$$(\mathbf{A} - 0\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Άρα $(x, y) = (x, -x) = x(1, -1)$, $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ είναι το $\mathbf{u} = (1, -1)$.

Για να βρούμε ένα ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v} = (x, y)$ ($x, y \in \mathbb{R}$) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$, λύνουμε το σύστημα:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Άρα $(x, y) = (x, x) = x(1, 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ είναι το $\mathbf{v} = (1, 1)$.

$$\text{Θέτουμε τώρα } \mathbf{P} = [\mathbf{u} \ \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Τότε:

Ο πίνακας $\mathbf{\Lambda}$ είναι διαγώνιος (προφανές).

Ο πίνακας $\mathbf{P}$ είναι αντιστρέψιμος (άμεσο αφού $\det(\mathbf{P}) = 2 \neq 0$) με $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και

$$\mathbf{P} \Delta \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{f}]_{\mathbf{E}} = \mathbf{A}.$$

γ) Ο πίνακας $\mathbf{A} = [\mathbf{f}]_{\mathbf{E}}$ είναι συμμετρικός. Άρα ο $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται από ορθογώνιο πίνακα. Τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A}$, $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ που βρήκαμε στο ερώτημα β) είναι ορθογώνια (αφού αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $\mathbf{A}$ - άλλωστε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$). Επομένως χρειάζεται μόνο να τα κανονικοποιήσουμε. Άρα αν θέσουμε

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \dots = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \dots = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

τότε τα $\hat{\mathbf{u}}$ και $\hat{\mathbf{v}}$ είναι ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\mathbf{A}$.

Συνεπώς, αν θέσουμε $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{Q} = [\hat{\mathbf{u}} \quad \hat{\mathbf{v}}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ο πίνακας $\mathbf{D}$ είναι διαγώνιος και ο

πίνακας $\mathbf{Q}$ είναι ορθογώνιος (άμεσο αφού $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$). Άρα:

$$\mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Άσκηση 2.

α) Είναι:

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y + z\} = \\ &= \{(2y + z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} \underset{\substack{(2y+z, y, z) = \\ (2y, y, 0) + (z, 0, z) = \\ y(2, 1, 0) + z(1, 0, 1)}}{=} \text{span}((2, 1, 0), (1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο $S = \{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V το οποίο επιπλέον είναι

και γραμμικώς ανεξάρτητο αφού $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Επομένως το σύνολο S αποτελεί βάση του V . Ο

υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ V παριστάνει επίπεδο το οποίο διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$.

β) Το διάνυσμα $\mathbf{v}$ ανήκει στον V αν και μόνο αν υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbf{v} = \kappa \mathbf{u} + \lambda \mathbf{w}$ (σε αυτήν την περίπτωση $[\mathbf{v}]_S = (\kappa, \lambda)$). Έχουμε,

$$\mathbf{v} = \kappa \mathbf{u} + \lambda \mathbf{w} \Leftrightarrow (3, 1, 1) = \kappa(2, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) \Leftrightarrow (3, 1, 1) = (2\kappa + \lambda, \kappa, \lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa + \lambda = 3 \\ \kappa = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}.$$

Άρα το $\mathbf{v}$ ανήκει στον V και το διάνυσμα συντεταγμένων του $\mathbf{v}$ ως προς τη βάση S του V που βρήκαμε στο α) είναι το $(1, 1)$.

γ) Έστω $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ($x, y, z \in \mathbb{R}$) ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$. Τότε το $\mathbf{n}$ ανήκει στον $V^\perp = (\text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{w}))^\perp$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \mathbf{n} \perp \mathbf{u} \\ \mathbf{n} \perp \mathbf{w} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Άρα το $\mathbf{n}$ ανήκει στον $V^\perp$ αν και μόνο αν $\mathbf{n} = (x, -2x, -x)$, $x \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$V^\perp = \{(x, -2x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -2, -1) : x \in \mathbb{R}\} = \text{span}((1, -2, -1))$$

Συνεπώς το μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v} = (1, -2, -1)$ αποτελεί βάση του $V^\perp$. Ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ $V^\perp$ παριστάνει ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{v}$.

Άσκηση 3.

α) Θεωρούμε τον πίνακα $\mathbf{A} = [\mathbf{w} \ \mathbf{v} \ \mathbf{n}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 + R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα το σύνολο $S = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}\}$ αποτελεί βάση του V η οποία προφανώς αποτελείται από διανύσματα του συνόλου $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{n}\}$.

β) Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε το διάνυσμα $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ ($= \mathbf{e}_1$) έχουμε ότι:

$$|\mathbf{w} \ \mathbf{v} \ \mathbf{v}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \dots = 1 \neq 0.$$

Άρα το σύνολο $T = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{v}\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία προφανώς επεκτείνει τη βάση S του V που βρήκαμε στο α).

γ) Ο πίνακας $\mathbf{P}$ αλλαγής βάσης από την κανονική βάση E του $\mathbb{R}^3$ στη βάση T του $\mathbb{R}^3$ που βρήκαμε

$$\text{στο β) είναι ο } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και έχει αντίστροφο τον } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Τότε έχουμε: } [\mathbf{u}]_T = \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{u}]_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα το διάνυσμα συντεταγμένων του $\mathbf{u}$ ως προς τη βάση T του $\mathbb{R}^3$ που βρήκαμε στο β) είναι το $(-1, 1, 0)$.

Άσκηση 4.

$$\text{Έστω } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2. \text{ Τότε } \mathbf{u} \in \text{Ker}f \Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα } \text{Ker}f = \{(1, -1)x, x \in \mathbb{R}\} = \text{span}((1, -1)) = \text{span}(\mathbf{u}) \text{ με } \dim(\text{Ker}f) = 1.$$

$$\text{Επίσης, } \text{Im}f = \text{colsp}(\mathbf{P}) = \text{span}\left(\frac{1}{2}(1, 1), \frac{1}{2}(1, 1)\right) = \text{span}((1, 1)) = \text{span}(\mathbf{v}) \text{ με } \dim(\text{Im}f) = 1.$$

Οι γεννήτορες $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, των υπόχωρων $\text{Ker}f$ και $\text{Im}f$ αντιστοίχως, είναι ορθογώνια διανύσματα (γιατί $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$) οπότε $\text{Ker}f \cap \text{Im}f = \{\mathbf{0}\}$.

Επίσης από το θεώρημα διάστασης έχουμε:

$$\dim(\text{Ker}f + \text{Im}f) = \dim(\text{Ker}f) + \dim(\text{Im}f) - \dim(\text{Ker}f \cap \text{Im}f) = 1 + 1 - 0 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2).$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις: $\mathbb{R}^2 = \text{Ker}f + \text{Im}f$ και $\text{Ker}f \cap \text{Im}f = \{\mathbf{0}\}$

συνεπώς (βλ. Θεώρημα 2.5.2, σελ. 101) θα ισχύει η σχέση $\mathbb{R}^2 = \text{Ker}f \oplus \text{Im}f$.