



ΘΕΜΑΤΑ

Άσκηση 1^η Έστω $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y + z = 0\}$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

- i) Βρείτε μία ορθογώνια βάση S_1 του V και μια ορθογώνια βάση S_2 του $V^\perp$. (10 μονάδες)
- ii) Έστω $\mathbf{w} = (-1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\mathbf{w}$ σε δύο συνιστώσες $\mathbf{w}_1$ και $\mathbf{w}_2$ ώστε $\mathbf{w}_1 \in V$, $\mathbf{w}_2 \in V^\perp$ και ναδειχθεί ότι $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. (10 μονάδες)
- iii) Επεκτείνετε την ορθογώνια βάση S_2 του $V^\perp$ που βρήκατε στο i) σε μια ορθογώνια βάση S του $\mathbb{R}^3$. Είναι αυτή η επέκταση μοναδική; (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας). (10 μονάδες)

Άσκηση 2^η Έστω E η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (x, y, z)$, τέτοια ώστε το σύνολο $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ να αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.

- i) Αν $[\mathbf{u}]_E = [1 \ 1 \ -1]^T \in \mathbb{R}^3$ με $[\mathbf{u}]_S = [0 \ 1 \ 1]^T$ να βρεθεί το διάνυσμα $\mathbf{v}_3 = (x, y, z)$. (10 μονάδες)
- ii) Να βρεθεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την βάση S στη βάση E . (10 μονάδες)

Άσκηση 3^η Έστω E η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με πίνακα

αναπαράστασης $[f]_E = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ και χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^2$.

- i) Δείξτε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη και βρείτε μια βάση της εικόνας της f ($\text{Im}f$). (10 μονάδες)
- ii) Ελέγξτε αν η f είναι 1-1 και επί (πλήρη αιτιολόγηση). (7 μονάδες)
- iii) Δείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{n} = (2, 3, -1)$ ανήκει στην εικόνα της f και βρείτε τις συντεταγμένες του ως προς τη βάση του $\text{Im}f$ που βρήκατε στο i). (8 μονάδες)

Άσκηση 4^η Έστω E η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με πίνακα

αναπαράστασης $[f]_E = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

- i) Να βρείτε μία βάση S του $\mathbb{R}^2$ ως προς την οποία ο πίνακας αναπαράστασης $[f]_S$ της f να είναι διαγώνιος. (15 μονάδες)
- ii) Έστω $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ με $[\mathbf{w}]_E = [1 \ -1]^T$. Να βρείτε το $[f(\mathbf{w})]_S$. (10 μονάδες)

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Το άριστα αντιστοιχεί σε 100 μονάδες και η προαγωγή σε 50 μονάδες.
2. Μόνο σωστά αριθμητικά αποτελέσματα αντιστοιχούν σε πλήρη βαθμολόγηση.
3. Σας παρακαλούμε να μην καπνίζετε και να απενεργοποιήσετε τα κινητά τηλέφωνα σας.
4. Η έξοδος από την αίθουσα κατά την διάρκεια της εξέτασης δεν επιτρέπεται.
5. Η αποχώρηση από την αίθουσα είναι δυνατή μετά την παρέλευση μιας ώρας από την έναρξη.

Καλή επιτυχία και καλό καλοκαίρι.

Απαντήσεις στις ασκήσεις της τελικής εξέτασης στη Γραμμική Άλγεβρα

Αγαπητέ φοιτητή/τρια, οι απαντήσεις που ακολουθούν αποτελούν ενδεικτικές λύσεις των ασκήσεων της τελικής εξέτασης. Οποιαδήποτε άλλη μαθηματικά σωστή διαδικασία που τυχόν έχετε ακολουθήσει για την επίλυσή τους, είναι αποδεκτή.

Άσκηση 1^η

i) Έχουμε,

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - 2y\} = \{(x, y, x - 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x, 0, x) + (0, y, -2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, -2) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{span}((1, 0, 1), (0, 1, -2)) \end{aligned}$$

Επομένως, τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ και $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -2)$ είναι γεννήτορες του V . Είναι και

γραμμικώς ανεξάρτητα αφού $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, οπότε αποτελούν μια βάση του V ,

Σύμφωνα με τη διαδικασία Gram-Schmidt, τα διανύσματα:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 0, 1) \text{ και } \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 = (0, 1, -2) - \frac{(0, 1, -2) \cdot (1, 0, 1)}{(1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1)} (1, 0, 1) = \dots = (1, 1, -1) \text{ αποτελούν}$$

ορθογώνια βάση του V . Συνεπώς μία ορθογώνια βάση του V είναι το σύνολο $S_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

Έστω $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Τότε,

$$\mathbf{x} \in V^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (1, 0, 1) = 0 \\ (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (1, 1, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \gamma = -\alpha \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Άρα: $\mathbf{x} \in V^\perp \Leftrightarrow \mathbf{x} = (\alpha, -2\alpha, -\alpha) = \alpha(1, -2, -1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς $V^\perp = \text{span}((1, -2, -1))$ και επομένως το μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{u}_3 = (1, -2, -1)$ αποτελεί βάση του $V^\perp$, οπότε $S_2 = \{\mathbf{u}_3\}$. Η S_2 είναι και ορθογώνια βάση του $V^\perp$ αφού $\dim(V^\perp) = 1$.

ii) Έστω $\mathbf{w} = (-1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Θα αναλύσουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ στις συνιστώσες του, $\mathbf{w}_1$ (που είναι η προβολή του $\mathbf{w}$ πάνω στον V) και $\mathbf{w}_2$ (η προβολή του $\mathbf{w}$ πάνω στον $V^\perp$). Έχουμε,

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 = \frac{(-1, 1, 1) \cdot (1, 0, 1)}{(1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1)} (1, 0, 1) + \frac{(-1, 1, 1) \cdot (1, 1, -1)}{(1, 1, -1) \cdot (1, 1, -1)} (1, 1, -1) = \dots = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3} \mathbf{u}_3 = \frac{(-1, 1, 1) \cdot (1, -2, -1)}{(1, -2, -1) \cdot (1, -2, -1)} (1, -2, -1) = \dots = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$\text{Φυσικά, } \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = (-1, 1, 1) = \mathbf{w}.$$

iii) Στο i) έχουμε βρει την $S_2 = \{\mathbf{u}_3\}$ ορθογώνια βάση του $V^\perp$ και την $S_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ορθογώνια βάση του V . Προφανώς τα δύο διανύσματα της S_1 επεκτείνουν την S_2 στην ορθογώνια βάση $S = \{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ του $\mathbb{R}^3$. Η επέκταση αυτή φυσικά δεν είναι μοναδική διότι π.χ. κάθε σύνολο της μορφής $\{\mathbf{u}_3, \kappa \mathbf{u}_1, \lambda \mathbf{u}_2\}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$ αποτελεί ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^3$ και είναι επέκταση της S_2 .

Άσκηση 2^η

i) Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την E στην S είναι ο $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & z \end{bmatrix}$. Τότε έχουμε ότι

$$\mathbf{P}[\mathbf{u}]_S = [\mathbf{u}]_E \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+1 \\ y \\ z-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \text{ Συνεπώς } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ii) Από το i) έχουμε ότι $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την S στην E είναι ο $\mathbf{P}^{-1}$ τον

οποίο βρίσκουμε κατά τα γνωστά. Είναι, $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 3^η

i) Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι, $-\lambda(\lambda-1)^2 = 0$ και οι ιδιοτιμές του, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Αφού $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$ ο $\mathbf{A}$ δεν αντιστρέφεται οπότε οι στήλες του (και οι γραμμές του) είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Αυτό σημαίνει ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός f δεν είναι αντιστρέψιμος.

Θεωρούμε τα διανύσματα στήλες του $\mathbf{A}$: $\mathbf{u} = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ και $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$.

Τότε έχουμε: $\text{Im } f = \text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Οι γεννήτορες του f είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα και μόνον δύο από αυτούς είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι έστω οι $\mathbf{u} = (0, -1, 1)$ και $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$. Πράγματι

η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ οπότε το σύνολο $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ αποτελεί βάση του $\text{Im } f$.

ii) Από το i) έχουμε αμέσως ότι $\dim \text{Im } f = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Άρα ο f δεν είναι επί και συνεπώς δεν είναι ούτε 1-1 (αφού $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμικός μετασχηματισμός).

iii) Στο i) δείξαμε ότι το σύνολο $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ αποτελεί βάση του $\text{Im } f$. Επομένως έχουμε ότι:

$$\mathbf{n} \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists \kappa, \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{n} = \kappa \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$$

Όμως:

$$\mathbf{n} = \kappa \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v} \Leftrightarrow (2, 3, -1) = \kappa(0, -1, 1) + \lambda(1, 2, -1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ -\kappa + 2\lambda = 3 \\ \kappa - \lambda = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Άρα, από τα παραπάνω, έχουμε αμέσως τα εξής $\mathbf{n} \in \text{Im } f$ και $[\mathbf{n}]_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

Άσκηση 4^η i) Θα διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα $\mathbf{A} = [\mathbf{f}]_E = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3)$$

Συνεπώς: $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 3$.

Άρα ο $\mathbf{A}$ έχει δύο ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 3$, αλγεβρικής πολλαπλότητας 1 η καθεμία.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ έχουμε: $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \mathbf{A}$. Άρα:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow_{(\mathbf{x}=[x_1 \ x_2]^T)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (2x_2, x_2) = x_2(2, 1)$, $x_2 \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u} = (2, 1)$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ έχουμε:

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I} = \mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow_{(\mathbf{x}=[x_1 \ x_2]^T)} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Επομένως $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x_1, -x_1) = x_1(1, -1)$, $x_1 \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{n} = (1, -1)$.

Τότε αν θέσουμε $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{n}\}$, $\mathbf{P} = [\mathbf{u} \ \mathbf{n}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, έχουμε αμέσως τα εξής:

α) Το S είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

β) $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$.

γ) $[\mathbf{f}]_S = \mathbf{D}$.

Επομένως το σύνολο S έχει τις απαιτούμενες από την άσκηση ιδιότητες.

ii) Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την E στην S είναι προφανώς ο $\mathbf{P}$ οπότε $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

Τότε έχουμε,

$$[\mathbf{f}(\mathbf{w})]_S = [\mathbf{f}]_S [\mathbf{w}]_S = [\mathbf{f}]_S \mathbf{P}^{-1} [\mathbf{w}]_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$