

Ομάδα Β

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα» 28-2-2011

Ονοματεπώνυμο... ..

ΘΕΜΑ 1 Δίνονται τα επίπεδα: $(\pi): 5x + 2y - 3z = 4$ και $(\rho): x + y - z = 1$.

A) Ναδειχθεί ότι τέμνονται.

B) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην τομή τους.

Γ) Να βρεθεί η καρτεσιανή παράσταση της ευθείας (ε) που ορίζουν.

Δ) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την (ε) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 2

A) Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$:

$V_1 = \{(x, y, z, w) : x = z, y = -w\}$ και $V_2 = \{(x, y, z, w) : x + y + z + 3w = 0, y = z\}$. Να βρεθούν βάσεις και οι διαστάσεις των $V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$.

B) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_2 + 2x_3 + x_4, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4).$$

1. Βρείτε μία βάση του πυρήνα της φ .

2. Βρείτε τον πίνακα της φ ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^3$.

ΘΕΜΑ 3

A) Έστω ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας A με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του A^{-1} και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους.

B) Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(i) Να αποδείξετε ότι $A^k = A^{k-2} + A^2 - I$, για $k = 3, 4, \dots$

(ii) Να υπολογίσετε (ακριβώς) τον πίνακα A^{100} .

ΘΕΜΑ 4

A) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι πάντα διανυσματικός χώρος.

B) Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \end{bmatrix}$. Να κατασκευάσετε μια διαγωνοποίηση του A και να λύσετε την

εξίσωση $X^2 = A$.

Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες.

Καλή επιτυχία !