

Ομάδα Α

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα» 24-2-2012

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1. Α) Δίνεται το σημείο $A(1,0,-1)$ και η ευθεία $(\varepsilon) \quad x-3 = \frac{y-4}{3} = 2-z$.

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε) .

2. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται από το A και την (ε) .

Β) Δίνεται η σφαίρα $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$ και το επίπεδο $-x + y + z = 3m$.

1. Να βρεθεί το m ώστε: (i) το επίπεδο να εφάπτεται και (ii) να τέμνει τη σφαίρα.

2. Ναδειχθεί ότι όταν $m=1$ το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που παράγεται από την τομή.

Να γίνουν πρόχειρα σχήματα με τις σχετικές θέσεις των γεωμετρικών αντικειμένων στα ερωτήματα Α και Β.

ΘΕΜΑ 2 Α) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων με πραγματικούς συντελεστές. Θεωρούμε τα υποσύνολα του V :

$$S = \{A : A \in V \text{ με } A^T = A\} \text{ και } T = \{A : A \in V \text{ με } A^T = -A\}.$$

1. Να αποδείξετε ότι τα σύνολα S, T είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V και να βρείτε από μία βάση τους.

2. Να αποδείξετε ότι: $V = S \oplus T$.

Β) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, w) = (x-y, 2x+w, y-z+w)$.

Να βρείτε τον πίνακα της f ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3$ καθώς και μια βάση του πυρήνα της.

ΘΕΜΑ 3.

Α) Έστω ένας 4×4 πίνακας A τέτοιος ώστε κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^4$ να είναι ιδιοδιάνυσμα του A .
Να δειχθεί ότι ο A έχει μια και μοναδική ιδιοτιμή.

(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κατάλληλα διανύσματα και τον αντίστοιχο ορισμό.)

Β) Έστω το γραμμικό σύστημα: $(\Sigma): \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + (a+7)x_3 + (a+9)x_4 = -3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + (a^2+3)x_4 = a^2 \end{cases}$.

Να βρεθεί για ποιες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και για ποιες τιμές της $a \in \mathbb{R}$ είναι αδύνατο. Για τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το (Σ) έχει άπειρες λύσεις, να λυθεί το σύστημα.

ΘΕΜΑ 4. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 14 & -14 \\ 0 & 30 & -28 \\ 0 & 42 & -40 \end{bmatrix}$.

Α) Να κατασκευαστεί (πλήρως) μια διαγωνοποίηση του A .

Β) Με βάση τη διαγωνοποίηση του A στο ερώτημα Α η διαφορετικά, να υπολογίσετε τον πίνακα A^{17} .

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία