

## Όμαδα Α

### Σχολή

Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών

Μάθημα : «Γραμμική Άλγεβρα»

### ΘΕΜΑ 1

Δίνεται το επίπεδο  $(\pi) : 5x - y - z = 3$  και  $(\rho) : x + y - z = 1$  Τα κάθετα διανύσματα των δύο επιπέδων είναι  $\vec{n}_\pi = (5, -1, -1)$  και  $\vec{n}_\rho = (1, 1, -1)$  Αν τα δύο επίπεδα δεν τέμνονται που σημαίνει ότι τα επίπεδα και κατα συνέπεια τα κάθετα τους διανύσματα είναι παράλληλα δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει ένα  $\lambda : \vec{n}_\pi = \lambda \vec{n}_\rho \Leftrightarrow (5, -1, -1) = (\lambda, \lambda, -\lambda) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda = 5 \\ \lambda = -1 \end{cases} \quad \text{Άτοπο. Άρα όντως τα δύο επίπεδα τέμνονται.}$$

Ένα διάνυσμα παράλληλο στην τομή τους είναι το  $\vec{u} = n_\pi \times \vec{n}_\rho$  αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε εύκολα αφού έχουμε τις συντεταγμένες

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = (+2)i - (-4)j + (+6)k = (2, 4, 6) \text{ Ισοδύναμο}$$

μπορούμε να έχουμε και το  $\vec{u} = (1, 2, 3)$  Για την καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας  $(\epsilon)$  που αποτελεί την τομή των δύο επιπέδων αρκεί αφού γνωρίζουμε το παράλληλο διάνυσμα της αρκεί να μπορούμε να βρούμε

$$\text{ένα σημείο π.χ αν } (z = 0) \rightarrow \begin{cases} 5x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow 6x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Άρα έχουμε τουλάχιστον ένα σημείο  $A \equiv (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$  Έτσι προκύπτει η

$$\text{καρτεσιανή εξίσωση: } (\epsilon) : \frac{x - \frac{2}{3}}{1} = \frac{y - \frac{1}{3}}{2} = \frac{z - 0}{3}.$$

Για την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την  $(\epsilon)$  και την αρχή των αξόνων χρειαζόμαστε ακόμη ένα μη συγγραμικό διάνυσμα π.χ το  $\vec{OA} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$  ή  $(2, 1, 0)$  Παίρνουμε λοιπόν την εξίσωση.

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ με } (x_o, y_o, z_o) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0).$$

Έτσι προκύπτει η εξίσωση του ζητούμενου επιπέδου

$$(Q) : x - 2y + z = 0$$

## ΘΕΜΑ 2

Έχουμε τον διανυσματικό χώρο  $V_1 = \{(x, y, z, w) : z = x, y = -w\} \Leftrightarrow$   
 $V_1 = \{(x, y, x, -y) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, -1)\} = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -1)]$   
 $V_2 = \{(x, y, z, w) : x + y + z + 3w = 0, y = z\} \Leftrightarrow$   
 $V_2 = \{(x, y, y, w) : x = -2y - 3w\} \Leftrightarrow V_2 = \{(-2y - 3w, y, y, w)\} \Leftrightarrow$   
 $V_2 = \{y(-2, 1, 1, 0) + w(-3, 0, 0, 1)\} = [(-2, 1, 1, 0), (-3, 0, 0, 1)]$   
 $\dim(V_1) = \dim(V_2) = 2$  Για την τομή  $V_1 \cap V_2$  αρκεί να χρησιμοποιήσουμε  
 όλες τις αρχικές εξισώσεις

$$V_1 \cap V_2 : \begin{cases} x = z \\ y = -w \\ z = y \\ x + y + z + 3w = 0 \end{cases} \rightarrow x = y = z = -w \rightarrow$$

$V_1 \cap V_2 = [(x, x, x, -x)] = [(1, 1, 1, -1)]$  Άρα  $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$  Από το γνωστό  
 θεώρημα προκύπτει ότι  $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) =$   
 $2 + 2 - 1 = 3$

$$V_1 + V_2 = [V_1 \cup V_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$V_1 + V_2 = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 3, 0), (0, 0, 3, 1)]$$

Για την γραμμική απεικόνιση  $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με τύπο

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_2 + 2x_3 + x_4, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4)$$

$$\begin{cases} \phi(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 2) \\ \phi(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 3) \\ \phi(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 4) \\ \phi(0, 0, 0, 1) = (-1, 1, -3) \end{cases}$$

$$\phi(e_{\mathbb{R}^4}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot e_{\mathbb{R}^3}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow M(f) = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\{Ker\phi = X \in \mathbb{R}^4 : \phi(X) = (0,0,0)\} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x_4 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3x_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x_4 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \rightarrow \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (c, -2c, c, 0) \rightarrow$$

$$Ker\phi = [(1, -2, 1, 0)]$$

### ΘΕΜΑ 3

Δύο όμοιοι πίνακες  $A, B$  έχουν την ιδιότητα να υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  τέτοιος ώστε  $AP = PB \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι το  $\chi_A = \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I) \cdot 1 = \det(A - \lambda I) \det(I_\nu) = \det(A - \lambda I) \det(PP^{-1}) = \det(P) \det(A - \lambda I) \det(P^{-1}) = \det(PAP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = \det(B - \lambda I) = \chi_B$ , το οποίο είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $B$

$$\text{Έχουμε τον πίνακα } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ αλλά και ο } A \cdot (A^2 - I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A^2 - I$$

Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση της άσκησης

Για την πρόταση ότι  $A^k = A^{(k-2)} + A^2 - I$  θα εφαρμόσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής

Για  $k = 3, A^3 = A^1 + A^2 - I \Leftrightarrow A(A^2 - I) = A^2 - I$  που αποδείξαμε προηγουμένως. Αξίζει να σημειωθεί ότι μπορεί να αποδειχθεί και με απλές (πίνακo-γραμμο)πράξεις

Έστω ότι ισχύει για  $k = n$ . Αρκεί να ισχύει για  $k = n + 1$ .

Από την μαθηματική υπόθεση έχουμε ότι  $A^k = A^{(k-2)} + A^2 - I \rightarrow A \cdot A^k = A \cdot (A^{k-2} + A^2 - I) \Leftrightarrow A^{k+1} = A^{k-1} + A \cdot (A^2 - I)$ , (Σχέση Α)

Όμως δείξαμε πριν ότι  $A \cdot (A^2 - I) = (A^2 - I)$

Άρα στην (Σχέση Α) έχουμε ότι  $A^{k+1} = A^{k-1} + A \cdot (A^2 - I) = A^{k+1} =$

$A^{k-1} + (A^2 - I)$  που είναι το ζητούμενο της επαγωγικής υπόθεσης.

Τώρα για τον ακριβή υπολογισμό του πίνακα  $A^{100}$  θα ακολουθήσουμε

$$\text{την ακόλουθη σκέψη} \left\{ \begin{array}{l} A^{100} = A^{98} + A^2 - I \\ A^{98} = A^{96} + A^2 - I \\ A^{96} = A^{94} + A^2 - I \\ A^{94} = A^{92} + A^2 - I \\ A^{92} = A^{90} + A^2 - I \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A^4 = A^2 + A^2 - I \end{array} \right. \rightarrow$$

$$A^{100} = A^2 + \left(\frac{100-4}{2} + 1\right)(A^2 - I) \Leftrightarrow A^{100} = 50 \cdot A^2 - 49I \rightarrow A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 50 & 1 \end{bmatrix}$$

#### ΘΕΜΑ 4

Για όλους τους τετραγωνικούς και αντιστρέψιμους πίνακες  $\nu \times \nu$  ισχύουν οι δύο σχέσεις  $A \operatorname{adj}(A) = \det(A)I$ ,  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$  ακόμη ισχύει ότι  $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A)^{\nu-1}$

Αφού  $A$  αντιστρέψιμος ισοδύναμα και ο  $\operatorname{adj} A$  αντιστρέψιμος αφού αν  $\det(A) \neq 0 \rightarrow \det(A)^{\nu-1} \neq 0 \rightarrow \det(\operatorname{adj}(A)) \neq 0$

Άρα μπορώ στις παραπάνω σχέσεις όπου  $A$  να θέσω και τον  $\operatorname{adj} A$ . Απο την πρώτη απο τις δυο σχέσεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) &= \det(\operatorname{adj} A)I \Leftrightarrow \operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = \det(A)^{\nu-1}I \rightarrow \\ A \cdot (\operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A))) &= A \det(A)^{\nu-1} = (A \cdot \operatorname{adj}(A)) \cdot (\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)) = A \det(A)^{\nu-1} \end{aligned}$$

Βάσει πάλι της πρώτης εξίσωσης έχουμε ότι  
 $adj(adj(A)) \cdot det(A) = Adet(A)^{\nu-1} \leftrightarrow adj(adj(A)) = Adet(A)^{\nu-2}$

Για την διαγωνιοποίηση του  $A$  θα χρειαστούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του  $A$

$$\text{Έχουμε λοιπόν } |A - \lambda I| = 0 \leftrightarrow \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

Έχοντας πλέον τις ιδιοτιμές αρκεί να λύσουμε το τρία ομογενή συστήματα  $\begin{cases} AX = O \rightarrow X = [(-3, 2, 1)] \\ (A - I)X = O \rightarrow X = [(-2, 1, 0)] \\ (A - 4I)X = O \rightarrow X = [(0, 0, 1)] \end{cases}$

$$\text{Έτσι έχουμε ότι } A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Τον αντίστροφο μπορούμε να τον υπολογίσουμε με την γνωστή διαδικασία μετατροπής  $[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$

Για την λύση της εξίσωσης  $X^2 = A \rightarrow$  Περνάμε την συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας στον διαγωνιοποιημένο

$$X = \pm \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Ήταν μια προσπάθεια να αποδοθούν οι λύσεις του διαγωνίσματος στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα» με χρήση  $\text{\LaTeX}$  απο την tetraktida  
 Οποιοδήποτε σχόλιο ή διόρθωση ευπρόσδεκτη