

Ομάδα Β

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.
Μάθημα: «Γραμμική Άλγεβρα», 20 - 1- 2015

Ονοματεπώνυμο.....

ΘΕΜΑ 1. (Α) Δίνεται επίπεδο $\Pi: x + 4y - 2z + 10 = 0$ και η ευθεία $\varepsilon: x - 2 = \frac{y - 5}{3} = \frac{-z - 1}{2}$.

(α) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της ευθείας ε με το επίπεδο Π .

(β) Βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις της ορθής προβολής της ευθείας ε πάνω στο επίπεδο.

Μονάδες 1

(Β) Να αναγνωρίσετε τις επιφάνειες που ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$F(x, y, z) = 0 \text{ και } G(x, y, z) = 0,$$

αν είναι $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ και $G(x, y, z) = x + z - 4$. Στη συνέχεια, να βρείτε τις εξισώσεις της ορθής προβολής της τομής των δύο επιφανειών $F(x, y, z) = 0$ και $G(x, y, z) = 0$, πάνω στο επίπεδο $z = 0$.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2. Δίνονται οι γραμμικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\} \text{ και } V_2 = [(1, 2, -1), (0, 10, -6), (2, -1, 1)].$$

i) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση για τον καθένα από τους V_1 και V_2 .

ii) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του υπόχωρου $V_1 + V_2$.

iii) Βρείτε τη διάσταση του υπόχωρου $V_1 \cap V_2$.

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 3 Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο:

$$f(x, y, z) = (x - z, 2x - y - z, x + y - 2z).$$

i) Βρείτε βάση και διάσταση του πυρήνα της f , $\text{Ker } f$, και δώστε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

ii) Βρείτε βάση και διάσταση της εικόνας της f , $\text{Im } f$, και δώστε τη γεωμετρική της ερμηνεία.

iii) Εξετάστε αν η f είναι 1-1 και επί και επαληθεύστε το Θεώρημα Διάστασης για γραμμικές απεικονίσεις.

iv) Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Χωρίς να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα, να εξετάσετε εάν είναι αντιστρέψιμος.

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 4 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \alpha \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να προσδιορίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους τους, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

(β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Για τις τιμές αυτές, να βρείτε αντιστρέψιμο 3×3 πίνακα P που διαγωνοποιεί τον πίνακα A .

(γ) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, βρείτε τον πίνακα $X = A^{2015}$.

Μονάδες 3,0

Καλή επιτυχία.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45 λεπτά.