

Γραμμική Άλγεβρα – Εξεταστική Φεβρουάριος 2010

Ομάδα Α – Λύσεις

Θέμα 1

A) Τα δύο σημεία $A(0,0,1)$ και $B(2,0,0)$, επειδή βρίσκονται στο επίπεδο, ορίζουν διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (2,0,-1)$ παράλληλο προς το επίπεδο. Επίσης το διάνυσμα $\vec{u} = (0,1,0)$ είναι παράλληλο στο επίπεδο. Τα $\overrightarrow{AB}$ και $\vec{u}$ δεν είναι συγγραμμικά, άρα: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{u} = (1,0,2)$ είναι κάθετο στο επίπεδο. Παίρνουμε και το σημείο A και η εξίσωση του επιπέδου είναι: $x + 2(z - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x + 2z - 2 = 0}$

B) $(\varepsilon_1): 1 - x = y = z - 1$ $\vec{u}_1 = (-1,1,1)$ $A(1,0,1)$
 $(\varepsilon_2): 2 - x = y - 1 = z$ $\vec{u}_2 = (-1,1,1)$ $B(2,1,0)$

Για να είναι οι δύο ευθείες παράλληλες πρέπει τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ να είναι συγγραμμικά. Τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ είναι συγγραμμικά για: $\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2$, $\lambda = 1$, άρα οι δύο ευθείες είναι παράλληλες. Επίσης για $x = 1$ στην ε_2 παίρνουμε $y = 2, z = 1$, άρα οι δύο ευθείες δεν ταυτίζονται.

Για το επίπεδο θα πάρουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (1,1,-1)$ και ένα από τα $\vec{u}$ και με εξωτερικό γινόμενο έχουμε το κάθετο, στο επίπεδο, διάνυσμα $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{u}_1 = (2,0,2)$. Παίρνουμε και το σημείο A και η εξίσωση του επιπέδου είναι: $2(x - 1) + 2(z - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 2 + 2z - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x + z - 2 = 0}$

Γ) (c): $x^2 + y^2 + z = 9, x^2 + (y - 1)^2 = 1$

Για $x^2 + y^2 + z = 9$ έχουμε:

Τομές με επίπεδα: $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$ Κύκλος

$x = 0 \Rightarrow y^2 = 9 - z$ Παραβολή

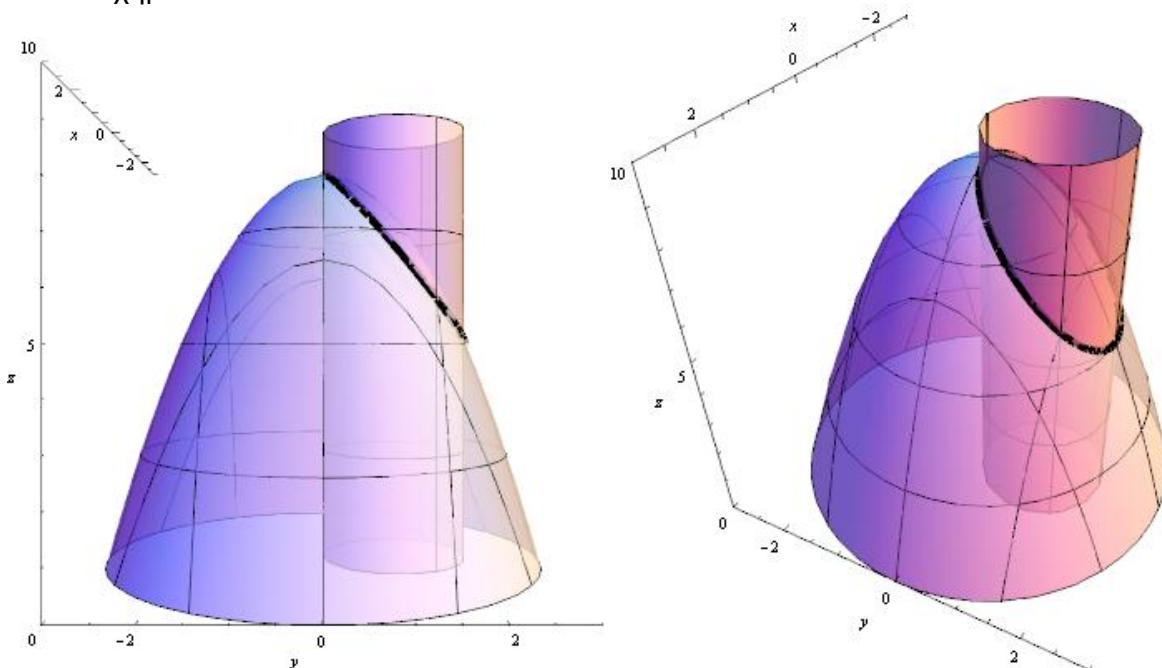
$y = 0 \Rightarrow x^2 = 9 - z$ Παραβολή

Τομές με άξονες: $\left. \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow z = 9, \left. \begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = \pm 3, \left. \begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x = \pm 3$

Η επιφάνεια είναι ένα κυκλικό παραβολοειδές.

Η $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ είναι ορθός κύλινδρος με άξονα την ευθεία $x = 0, y = 1, z = t$
 $0 \leq y \leq 2, -1 \leq x \leq 1$

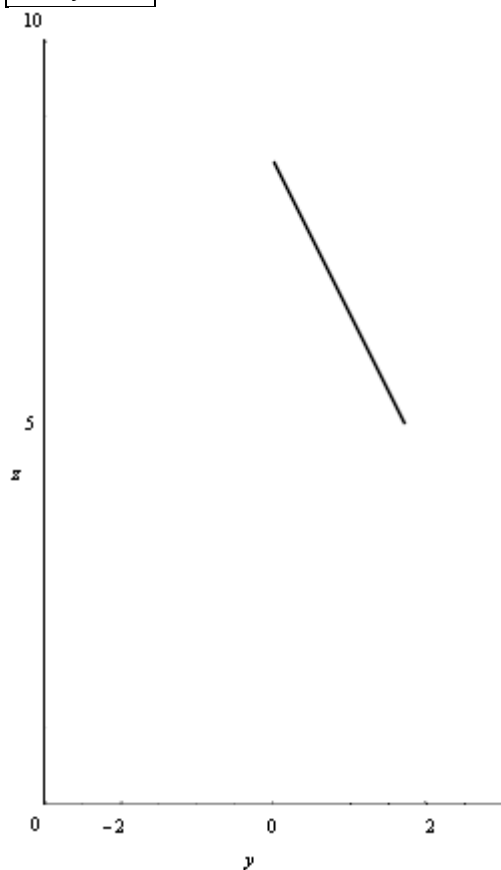
Το σχήμα είναι:



Για να βρούμε την προβολή της καμπύλης (c) με το επίπεδο yOz πρέπει να απαλείψουμε την μεταβλητή x από τις εξισώσεις της καμπύλης και στη συνέχεια θα πάρουμε την εξίσωση που θα βρούμε με το επίπεδο x=0 που θα ορίζουν την προβολή.

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= 1 - (y - 1)^2 \\ x^2 + y^2 + z &= 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - (y - 1)^2 + y^2 + z = 9 \Rightarrow \boxed{2y + z = 9}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2y + z &= 9 \\ x &= 0 \\ 0 \leq y &\leq 2 \end{aligned}} \Rightarrow \text{Η προβολή της (c) είναι ευθύγραμμο τμήμα.}$$



Μια νέα παράσταση της καμπύλης ως τομή δύο επιφανειών είναι η εξίσωση του επιπέδου που βρήκαμε μαζί με την εξίσωση του κυλίνδρου.

$$\boxed{\begin{aligned} 2y + z &= 9 \\ x^2 + (y - 1)^2 &= 1 \end{aligned}}$$

Μια παραμετρική της παράσταση είναι: $\boxed{x = \cos t, y = 1 + \sin t, z = 7 - 2 \sin t}$

Θέμα 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Για να βρούμε τις ιδιοτιμές παίρνουμε:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)(1 - \lambda)(-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = 2$$

Για $\lambda=0$ έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (x_3, -2x_3, x_3) = x_3(1, -2, 1), x_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Για $\lambda=1$ έχουμε:

$$\left. \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_2, 0) = x_2(-1, 1, 0), x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda=2$ έχουμε:

$$\left. \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) = x_1(1, 0, 0), x_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii) Μια διαγωνοποίηση του A είναι:

$$\Delta = \text{diag}(0, 1, 2), \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iii) $A^{27} = P\Delta^{27}P^{-1}$, άρα μια διαγωνοποίηση του A^{27} είναι:

$$\Delta^{27} = \text{diag}(0, 1, 2^{27}), \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iv) $f(\lambda) = \chi_A(\lambda) \cdot \pi(\lambda) + v(\lambda)$

$$f(\lambda) = \lambda^{27}, \quad \chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$$

Γράφουμε το υπόλοιπο στη μορφή $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$. Άρα έχουμε:

$$\lambda^{27} = \chi_A(\lambda) \cdot \pi(\lambda) + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις ιδιοτιμές στην εξίσωση για να προσδιορίσουμε τα α, β, γ .

$$\text{Για } \lambda = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\text{Για } \lambda = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta$$

$$\text{Για } \lambda = 2 \Rightarrow 2^{27} = 4\alpha + 2\beta = 4 - 4\beta + 2\beta = 4 - 2\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 - 2^{26} \\ \alpha = 2^{26} - 1 \end{cases}$$

Αν αντικαταστήσουμε στην $f(\lambda)$ το λ με το A θα έχουμε:

$$A^{27} = \chi_A(A) \cdot \pi(A) + (2^{26} - 1)A^2 + (2 - 2^{26})A \text{ και επειδή από το θεώρημα Cayley-Hamilton}$$

$$\chi_A(A) = 0 \Rightarrow \boxed{A^{27} = (2^{26} - 1)A^2 + (2 - 2^{26})A}$$

Θέμα 3

$$\text{A)} \quad V_1 = \{(x, y, z, w) : x = 2y, z + w = 0\} = \{(2y, y, -w, w) : y, w \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(2, 1, 0, 0) + w(0, 0, -1, 1) : y, w \in \mathbb{R}\} = [(2, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)]$$

Τα διανύσματα $(2, 1, 0, 0)$ και $(0, 0, -1, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και το καθένα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης του $\mathbb{R}^4$ άρα το $V_1 \subset \mathbb{R}^4$.

$$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4 \Rightarrow V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$$

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}$$

Άρα το V_2 πρέπει να αποτελείται από δύο διανύσματα τα οποία θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους και με τα διανύσματα του V_1 . Έτσι

$$V_2 = [(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$$

$$\text{B)} \quad \left. \begin{matrix} AX_\mu = B \\ AX_o = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow AX_\mu + AX_o = B + 0 \Rightarrow A(X_\mu + X_o) = B$$

Άρα τα $X = X_\mu + X_o$ αποτελούν λύση του συστήματος.

Θέμα 4

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z - w &= \kappa \\ (S): \quad x - 2y + 2z - 2w &= \lambda \\ x + y + z + w &= \mu \\ 4x - 2y + 6z - 2w &= \nu \end{aligned}$$

A) Φέρνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|B]$ σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & \kappa \\ 1 & -2 & 2 & -2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \mu \\ 4 & -2 & 6 & -2 & \nu \end{array} \right] \xrightarrow{G_4 \rightarrow G_4 - \widetilde{G_3} - G_2 - G_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & \kappa \\ 1 & -2 & 2 & -2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu - \mu - \lambda - \kappa \end{array} \right] \xrightarrow{G_1 \rightarrow \widetilde{G_1} - G_2 - G_3} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa - \lambda - \mu \\ 1 & -2 & 2 & -2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu - \mu - \lambda - \kappa \end{array} \right] \xrightarrow{G_2 \rightarrow \widetilde{G_2} - G_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa - \lambda - \mu \\ 0 & -3 & 0 & -3 & \lambda - \mu \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu - \mu - \lambda - \kappa \end{array} \right] \xrightarrow{G_1 \leftrightarrow G_3} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & -3 & 0 & -3 & \lambda - \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa - \lambda - \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu - \mu - \lambda - \kappa \end{array} \right] \end{aligned}$$

Άρα για να είναι συμβιβαστό το σύστημα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} \nu - \mu - \lambda - \kappa = 0 \\ \kappa - \lambda - \mu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \nu = \mu + \lambda + \kappa \\ \kappa = \lambda + \mu \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \nu = 2\mu + 2\lambda \\ \kappa = \lambda + \mu \end{array}}$$

B) Έστω $U = \{(\kappa, \lambda, \mu, \nu) : \kappa = \lambda + \mu, \nu = 2\mu + 2\lambda\}$

$$U = \{(\lambda + \mu, \lambda, \mu, 2\lambda + 2\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(1, 1, 0, 2) + \mu(1, 0, 1, 2) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = [(1, 1, 0, 2), (1, 0, 1, 2)]$$

Τα διανύσματα του U είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και το καθένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης του $\mathbb{R}^4$ άρα το $U \subset \mathbb{R}^4$.

Μια βάση του U είναι η: $\{(1, 1, 0, 2), (1, 0, 1, 2)\}$.

Η διάσταση του U είναι $\dim U = 2$.

Γ) Αν $(\kappa, \lambda, \mu, \nu) = (0, -1, 1, 0)$ ικανοποιούνται οι σχέσεις στο A άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό.

Έχουμε τότε:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + w = 1 \\ -3y + z - 3w = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 - 4y - 4w \\ z = 3y + 3w - 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } (x, y, z, w) &= (3 - 4y - 4w, y, 3y + 3w - 2, w) = \\ &= (3, 0, -2, 0) + y(-4, 1, 3, 0) + w(-4, 0, 3, 1), y, w \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Για τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση στο 3.B. Μια τυχαία λύση του συστήματος είναι $(x, y, z, w) = (3, 0, -2, 0)$ για $y, w = 0$. Αφαιρώντας τη λύση αυτή από τη γενική που βρήκαμε πιο πάνω θα πάρουμε τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος:

$$\begin{aligned} X_o &= (3, 0, -2, 0) + y(-4, 1, 3, 0) + w(-4, 0, 3, 1) - (3, 0, -2, 0) \\ &= y(-4, 1, 3, 0) + w(-4, 0, 3, 1), y, w \in \mathbb{R} \end{aligned}$$